# Rozdział 1

# Relacje

## 1.1 Pary

**Definicja 1.1.1** Parą nieuporządkowaną *nazywamy zbiór* $\{a, b\}$ *(dubleton, złożony z obiektów* $a$ *i* $b$*).*

Kolejność elementów w parze nieuporządkowanej nie ma znaczenia: $\{a, b\} = \{b, a\}$, oraz para $\{b, b\} = \{b\}$ - singleton $b$.

Niech $(a, b)$ oznacza parę uporządkowaną, tzn taki obiekt, który potrafi „utrzymać porządek” elementów tak aby para $(a, b) \neq (b, a)$. Tego typu obiekty są bardzo ważne w matematyce, np. aby opisać punkty na płaszczyźnie. Ponieważ matematycy lubią budować elementy z już istniejących (aby niepotrzebnie nie mnożyć bytów ponad potrzeby (patrz np. *Brzytwa Ockhama*), matematycy postanowili zapisać pary jako pewne zbiory:

**Definicja 1.1.2** Parą uporządkowaną *oznaczaną symbolem* $(a, b)$ *nazywamy zbiór* $\{a, \{b\}\}$.

Uwaga: para uporządkowana może być zdefiniowana na wiele sposobów. Niektórzy autorzy używają $\{a, \{a, b\}\}$. Nie ma to większego znaczenia, ważne jest aby zachowana była własność $(a, b) = (c, d) \iff a = b \wedge c = d$. W dalszych wykładach dowiemy się formalnie, że taka definicja jest dobra i nie prowadzi do sprzeczności (jak np. zbiór wszystkich zbiorów z pierwszej części zajęć). Na razie wystarczy, że „wyraźnie widzimy”, że definicja pary uporządkowanej spełnia tę własność i np. mamy $(1, 2) = \{1, \{2\}\}$ a $(2, 1) = \{2, \{1\}\}$ i jeśli tylko $a \neq b$, to te pary są różne, bo nie mają takich samych elementów: np. $2 \neq \{2\}$, bo formalnie, ten drugi element jest zbiorem, natomiast pierwszy jest liczbą.

**Uwaga 1.1.1** *Niech $a$ będzie parą uporządkowaną. Możemy pisać $a = (x, y)$, i potem używać współrzędnych $x$ i $y$, ale możemy też czasem pisać $\pi_1$ lub $\pi_x$ aby oznaczyć pierwszy element z pary. Podobnie $\pi_2$ lub $\pi_y$ dla drugiego.*

## 1.2 Iloczyn Kartezjański

**Definicja 1.2.1** *Niech będą dane dwa zbiory $X$ i $Y$.*

Iloczynem kartezjańskim zbiorów $X$ i $Y$ *nazywamy zbiór*

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

**Uwaga 1.2.1** *Operator := podkreśla, że coś definiujemy (a nie, że stwierdzamy, że dwa obiekty są równe). Rzecz po lewej stronie znaku jest definiowana za pomocą wyrażenia po prawej. Czasem stosuje się zapis =:, żeby oznaczyć obiekt definiowany po prawej strony, a jego definicja jest po lewej. Innymi słowy, obiekt definiowany jest zawsze po stronie dwukropka.*

Iloczyn kartezjański to po prostu zbiór wszystkich par uporządkowanych, gdzie pierwszy element jest ze zbioru $X$ a drugi ze zbioru $Y$.

Jeśli zbiór $Y = X$, to będziemy oznaczać $X \times X = X^2$.

Łatwo zobaczyć, że zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ to zbiór punktów na płaszczyźnie. Tak samo zbiór $[0, 1] \times [0, 2]$ to prostokąt na płaszczyźnie i łatwo można go narysować. Zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$ to prosta na płaszczyźnie. przekształcenia płaszczyzny można zapisywać jako funkcje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, np. $f(x, y) = (2x, 2y)$, to funkcja rozciągająca obiekty dwukrotnie, natomiast funkcja $f(x, y) = (y, x)$ to obrót o $90^o$. Dzięki temu o obiektach geometrycznych możemy mówić w języku zbiorów, a nie linii, punktów, okręgów, kątów, czy być zmuszonymi do użycia cyrkli i linijek. Podejście to zawdzięczamy XVII wiecznemu matematykowi Kartezjuszowi (stąd nazwa iloczynu kartezjańskiego).

Łatwo jest zobaczyć iloczyny kartezjańskie zbiorów skończenie wymiarowych: można wymienić wszystkie ich elementy. Np. niech $X = \{1, 2, 3\}$ a $Y = \{-1, -2\}$. Wtedy $X \times Y$ zamiera następujące elementy:

$$\begin{array}{ccc} (1, -1) & (2, -1) & (3, -1) \\ (1, -2) & (2, -2) & (3, -2) \end{array}$$

Zapisując interpretację w języku zbiorów dostajemy formalnie:

$$X \times Y = \{\{1, \{-1\}\}, \{2, \{-1\}\}, \{3, \{-1\}\}, \{1, \{-2\}\}, \{2, \{-2\}\}, \{3, \{-2\}\}\}$$

Co jest oczywiście bardzo niewygodne, dlatego używamy oznaczenia $(a, b)$.

$$X \times Y = \{(1, -1), (2, -1), (3, -1), (1, -2), (2, -2), (3, -2)\}$$

Naturalne pytanie: czy można zdefiniować iloczyn kartezjański większej ilości zbiorów? Oczywiście jest to możliwe, i nawet konieczne, np. aby objąć geometrie przestrzeni trójwymiarowej ($\mathbb{R}^3$). Musimy tylko przyjąć w jaki sposób zdefiniujemy $X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$ dla dowolnego $nin\mathbb{N}$ i kolekcji pewnych zbiorów $X_i$. Ponieważ jesteśmy matematykami użyjemy tego co mamy: skoro $X_1 \times X_2 = A$ jest zbiorem, to mozemy wykonać operację iloczynu $A \times X_3 = B$ itd. Elementami zbioru $A \times X_3$ są obiekty $((a, b), c)$ takie, że $a \in X_1$, $b \in X_2$, $c \in X_3$.

Warto zauważyć, że formalnie $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$, bo ich elementami są obiekty $((a, b), c) = \{\{a, \{b\}\}, c\}$ lub $(a, (b, c)) = \{a, \{b, \{c\}\}\}$. Widać, że jako zbiory, są one różne od siebie o ile $a \neq b \neq c$.

Natomiast z matematycznego punktu widzenia, nie ma większego znaczenia jak poukładamy nawiasy w mnożeniu kartezjańskim.

**Twierdzenie 1.2.2** *Istnieje bijekcja pomiędzy $(A \times B) \times C$ a $A \times (B \times C)$.*

**Dowód**: ćwiczenie.

**Uwaga 1.2.3** *jeśli istnieje bijekcja między zbiorami $A$ i $B$, a nie chcemy się wdawać w szczegóły definicji tej funkcji, to piszemy tylko $A \cong B$. Zazwyczaj wymagane jest to, aby taka bijekcja była oczywista (jak w naszym przykładzie): $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$.*

Ponieważ kolejność nawiasów nie ma znaczenia, uzasadnione jest pisanie zbiorów typu $X^n$.

**Uwaga 1.2.4** *Jako matematycy uzupełnimy definicję $X^n$ $n = 1$ w następujący (logiczny sposób): $X^1 = X$.*

***Ćwiczenie:*** *pokazać, że $X^n \times X^m \cong X^{n+m}$.*

*Wprowadzenie $X^0$ jest nieco bardziej kłopotliwe. Jeśli zrobimy $X^0 = \emptyset = \{\}$, wtedy pewne własności iloczynu (liczb) nie zajdą (np. $X^0 \times X^n \neq X^n$).*

***Ćwiczenie:*** *pokazać, ile wynosi $X \times \emptyset$ oraz $\emptyset \times X$.*

*Jeśli $X = \mathbb{R}$ to czasem oznaczamy $X^0 = \{0\}$. Nadal mamy $X^0 \times X^n \neq X^n$, ale można pokazać, że: $\{0\}^k \times X^n \cong X^n$ (istnieje bijekcja).*

## 1.3 Funkcje

Wiemy, że funkcje są przyporządkowaniami - $f : X \to Y$ jest taka, że dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden przyporządkowany $y \in Y$ i piszemy wtedy $f(x) = y$.

Oczywiście, funkcje jakie spotykamy najczęściej to $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a ich wykresy rysujemy w układzie kartezjańskim! aby narysować wykres funkcji, program komputerowy zazwyczaj generuje kolejne pary $(x, y) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ i umieszcza na ekranie piksele w odpowiednich współrzędnych.

Dlatego na funkcje można patrzeć jeszcze inaczej: jako wykresy funkcji, lub inaczej, jako na podzbiory w $X \times Y$, gdzie $X$ jest zbiorem argumentów (dziedziną), a $Y$ zbiorem wartości:

$$G_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Zbiór $G_f$ nazywamy własnie wykresem funkcji.

**Przykład:** $f : \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1\}$, $f(x) = x^2$. Wykresem tej funkcji jest zbiór: $G_f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$.

## 1.4 Relacje

Załóżmy, że ktoś daje zam podzbiór $G \subset X \times Y$. Czy zawsze taki zbiór jest wykresem jakiejś funkcji?

**Przykład:** $G_f = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 0)\} \subset \{-1, 0, 1\} \times \{0, 1\}$ jest wykresem funkcji (**jakiej? - zadanie**).

**Anty-Przykład:** $G_f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (1, 0)\} \subset \{-1, 0, 1\} \times \{0, 1\}$ nie jest wykresem funkcji (**dlaczego? - podpowiedź:** $f(1) = ?$).

**Anty-Przykład:** $G_f = \{(-1, 1), (0, 0)\} \subset \{-1, 0, 1\} \times \{0, 1\}$ nie jest wykresem funkcji (**dlaczego? - podpowiedź: znów, ile wynosi** $f(1) = ?$).

Na szczęscie matematycy się nie zrażają i właściwie uznają każdy obiekt typu podzbiór iloczynu kartezjańskiego za interesujący:

**Definicja 1.4.1** *Niech $X, Y$ będą dowolnymi zbiorami.*

*Dowolny podzbiór $R \subset X \times Y$ nazywamy* relacją.

Jesli $X = Y$ to relację $R \subset X \times X = X^2$ nazywamy relacją na $X$.

Czasem piszemy $xRy$ aby zaznaczyć, że para $(x, y) \in R$. Mówimy, że $x$ jest w relacji $R$ z $y$.

Relacje między obiektami znamy z życia codziennego. Czasem np. mówi się, że ktoś ma dobre relacje z kimś innym. Państwa mają relacje dyplomatyczne między sobą a np. informatycy tworzą relacyjne bazy danych. Jak pokazaliśmy na początku, funkcje wprowadzają relacje pomiędzy argumentami, a wartościami. Okazuje się, że wiele znanych obiektów, których używamy tez jest relacjami, np. relacja równości bądź nierówności, relacja mniejszości itp.

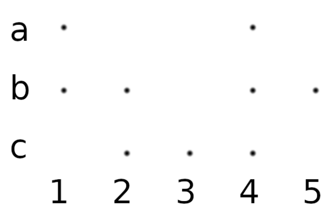
**Przykład**: Niech $X = \{pies, kot, Ania\}$, oraz $Y = \{mleko, ko, sodycze\}$ . Określamy relację $R \subset X \times Y$ jako $R = \{(pies, ko), (kot, mleko), (Ania, mleko), (Ania, sodycze)\}$. Załóżmy, że relacja określa preferencje żywieniowe, a więc w powyższym przykładzie relacji $R$ odpowiada słowo „lubi”. Czyli pies lubi kość, kot lubi mleko, Ania lubi zarówno mleko jak i słodycze.

Powyższy przykład uzasadnia użycie notacji $xRy$ w relacjach. Mamy mianownik: x, czasownik: R, i dopełniacz: y, a całe wyrażenie czyta się jak w języku naturalnym.

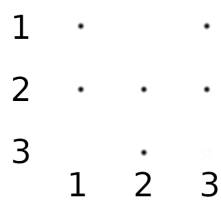
## 1.5 Rysowanie relacji

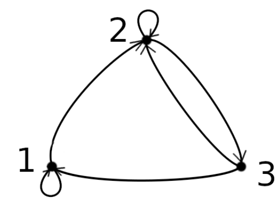
Jeśli zbiory $X$ i $Y$ w relacji są skończone to można je łatwo przedstawić graficznie.

Relacje dwuargumentowe, podobnie jak funkcje można rysować w układzie współrzednych. Tworzymy wykres $G_R = \{(x, y) : xRy\}$ i nanosimy te punkty na wykres. Poniższy wykres przedstawia relację $R \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{a, b, c\}$.




Jeśli relacja jest nad jednym zbiorem $X$ mamy dwie możliwości: rysujemy wykres: lub tzw. graf. W grafie przedstawiamy elementy $X$ jako wierzchołki (punkty) a strzałką łączymy wierzchołki $a$ i $b$ jeśli istnieje para $(a, b) \in R$. Poniżej przedstawiony jest wykres relacji i graf tej samej relacji $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$ nad $X = \{1, 2, 3\}$.




## 1.6 Własności relacji

Aby być w stanie zapanować nad rożnymi rodzajami relacji,matematycy wprowadzili różne klasy własności. Dzięki nim, można podawać twierdzenia ogólne o danej klasie. Jeśli udowodni się, że nasza wybrana relacja jest w danej klasie, to wszystkie twierdzenia (ogólne) o danym typie relacji można wtedy zastosować do naszej relacji.

**Definicja 1.6.1** *Relację $R$ na $X$ nazywamy:*

- zwrotną*, jeśli $xRx$ dla każdego $X \in x$.*
- symetryczną*, jeśli dla każdych $x \in X$, $y \in X$ zachodzi $xRy \implies xRy$.*
- przechodnią*, jeśli dla każdych $x, y, z$ w $X$ zachodzi $xRy \wedge yRz \implies xRz$.*
- antysymetryczną *jeśli dla każdych $x, y$ mamy $xRy \wedge yRx \implies x = y$.*
- spójną *jeśli dla każdych $x, y$ mamy $xRy \vee yRx$.*

***Zadanie:*** *niech $X$ będzie zbiorem pięcioelementowym (np. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Podać przykłady (różnych) relacji, które mają jedną z powyższych własności. Jeśli to możliwe, przykład nie powinien mieć innych własności (powinien mieć tylko jedną własność - jeśli to możliwe).*

## 1.7 Relacje równoważności

*Najpopularniejszą klasą relacji jest relacja równoważności i dlatego dajemy jej osobną definicję:*

***Definicja 1.7.1*** *Relację nazywamy* relacją równoważności *(równoważnością) jeśli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.*

***Przykłady*** *(Zadanie: zastanów się/sprawdź dlaczego tak jest lub nie jest):*

- *relacja* $x = y$ *jest relacją równoważności na dowolnym zbiorze* $X$.
- *relacja modulo(n) w zbiorze liczb naturalnych:* $xMOD(n)y$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $x$ *daje tę samą resztę z dzielenia przez* $n$ *co* $y$, *jest relacją równoważności.*
- *relacja na* $X = [0,1]^2$ *dana przez* $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$ *lub gdy* $x_1 = x_2 \wedge y_1 \in \{0,1\} \wedge y_2 \in \{0,1\}$ *jest relacją równoważności.*
- *relacja* $x < y$ *nie jest relacją równoważności w zbiorze* $\mathbb{N}$.
- *Niech* $X = \mathcal{P}(Y)$ *- zbiór wszystkich podzbiorów zbioru* $Y$. *Jeśli* $Y \neq \emptyset$ *wtedy relacja* $A \subset B$ *(bycia podzbiorem) nie jest relacją równoważności na* $X$. *Jeśli* $Y = \emptyset$ *wtedy jest relacją równoważności.*
- *relacja* $\{(1,1),(2,2)\} \subset \{1,2,3\}^2$ *nie jest relacją równoważności.*
- *relacja* $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(3,2),(2,3)\} \subset \{1,2,3\}^2$ *nie jest relacją równoważności.*
- *relacja* $R$ *na* $X = \mathcal{P}(Y)$ *dana jako* $ARB \iff A \cap B \neq \emptyset$ *nie jest relacją równoważności.*

## 1.8 Dzielenie przez relację

**Definicja 1.8.1** *Jeśli* $R$ *jest relacją równoważności na* $X$, *to* klasę równoważności elementu $x$ *w tej relacji nazywamy zbiór* $[x]_R = \{y \in X : yRx\}$.

Własności (jako **ćwiczenie** - zastanowić się z jakich własności relacji równoważności dany punkt wynika):

- $x \in [x]_R$
- $xRy \implies [x]_R = [y]_R$
- $\neg(xRy) \implies [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

**Definicja 1.8.2** *Ilorazem zbioru $X$ przez relację równoważności $R \subset X^2$ nazywamy zbiór:*

$$X/_R := \{[x]_R : x \in X\}. \tag{1.1}$$

Dzielenie zbiorów przez relacje równoważności jest ważnym narzędziem matematyki. Można w ten sposób tworzyć np. „ciekawie” zachowujące się zbiory, np. słynna wstęgę Möbiusa, czy butelkę Kleina.

**Przykład:** Niech $R$ na $\mathbb{R}$ będzie dana jako $xRy \iff x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$, gdzie $a = \lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę $a \in \mathbb{Z}$ taką, że $a \leq x$. Zauważmy, że $[x]_R = [n + x]$ dla każdej $n \in \mathbb{Z}$. Czym jest $\mathbb{R}/_R$? (Podpowiedź: jakie klasy mijamy patrząc na $[x + t]$ gdy płynnie zmieniamy $t$ od 0 do jakiejś dużej wartości? Co się dzieje, gdy „przejeżdżamy” przez t = 1, 2, 3,...?).

**Ćwiczenie:** Niech $P$ na $X = \mathbb{R}^2$ będzie dane jako $(x_1, y_2)P(x_2, y_2)$ wtedy i tylko wtedy gdy $x_1Rx_2 \wedge y_1Ry_2$, gdzie $R$ jest jak w akapicie powyżej. Pokazać, że $P$ to relacja równoważności. Czym jest $X/_P$?

## 1.9 Porządki - wstęp

Inną znana klasą relacji są relacje porządku.

### 1.9.1 Porządki częściowe

**Definicja 1.9.1** *Relację nazywamy* częściowym porządkiem *jeśli jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna.*

**Przykład:** Znana wszystkim relacja $\leq$ na zbiorach $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, itp. jest relacją częściowego porządku.

**Ćwiczenie:** Dlaczego relacja $<$ nie jest porządkiem częściowym?

**Przykład:** Niech będzie dana relacja $|$ na liczbach $\mathbb{N}$ taka, że $x|y \iff \exists a \in \mathbb{N} : x = ay$. Innymi słowy, $x$ jest w relacji z $y$, gdy $x$ dzieli $y$ bez reszty. Relacja $|$ jest relacją częściowego porządku - **ćwiczenie:** sprawdzić!.

W relacji $|$ możemy wskazać przykłady *elementów nieporównywalnych*: dwóch elementów takich, że prawda jest $\neg x|y \wedge \neg y|x$ - np. dwie różne liczby pierwsze.

**Inny przykład:** Niech $X$ będzie pewną *rodziną zbiorów* (tzn. $X$ jest zbiorem, którego elementami są inne zbiory - przykładem rodziny, który już widzieliśmy jest zbiór wszystkich podzbiorów $\mathcal{P}(A)$). Relacja $\subseteq$ (zawieranie się) jest relacją porządku na zbiorze $X$.

**Ćwiczenie:** podaj przykład zbioru $X$ i dwóch elementów $A, B \in X$ takich, że $A$ i $B$ są nieporównywalne w relacji $\subseteq$.

**Ćwiczenie:** podaj przykład zbioru $X$ mającego nieskończona ilość elementów, w którym nie ma elementów nieporównywalnych.

### 1.9.2 Porządki liniowe

Relacje, które nie mają elementów nieporównywalnych mają specjalną nazwę:

**Definicja 1.9.2** *Relację nazywamy* porządkiem liniowym *na $X$ jeśli jest porządkiem częściowym na $X$ i dodatkowo jest* ***spójna*** *(tzn. dla każdych $x, y$ jest $xRy \vee yRx$).*

**Przykłady**: porządek leksykograficzny na literach alfabetu j. polskiego jest porządkiem liniowym.

**Ćwiczenie**: podać co najmniej dwie (różne) relacje porządku liniowego zdefiniowanego na zbiorze punktów płaszczyzny (tzn. $X = \mathbb{R}^2$ a relację należy określić na $X$).

**Ćwiczenie**: podać przykład porządku częściowego z elementami nieporównywalnymi okreslonego na punktach płaszczyzny.

**Uwaga:** jeśli chcemy podkreślić, że rozważamy daną relację porządku $\triangleleft$ na danym zbiorze $X$ możemy napisać $(X, \triangleleft)$. Będziemy mówić, że zbiór $X$ jest uporządkowany (częściowo lub liniowo) jeśli wybrana relacja jest odpowiednio częściowym lub liniowym porządkiem.

Często spotykane zapisy: $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ - podzbiory $A$ uporządkowane relacją zawierania się; $(\mathbb{R}, \leq)$ - liczby rzeczywiste uporządkowane standardowym operatorem mniejsze bądź równe; $(\mathbb{N}, |)$ - liczby naturalne uporządkowane podzielnością, $(\mathbb{Z}, |)$ - liczby całkowite uporządkowane podzielnością, $(\mathbb{Z}, \leq)$ - liczby całkowite uporządkowane standardowo.

### 1.9.3 Elementy ekstremalne i kresy zbiorów

W zbiorach (częściowo) uporządkowanych możemy rozważać istnienie elementów, które są w sensie tych porządków skrajne, tzn. nie ma innych elementów, które byłyby mniejsze lub większe.

**Definicja 1.9.3** *Niech* $(X, \lhd)$ *będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Element* $x \in X$ *nazywamy elementem* maksymalnym, *jeśli*

$$\forall y \in X : x \lhd y \Rightarrow x = y.$$

**Definicja 1.9.4** *Niech* $(X, \lhd)$ *będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Element* $x \in X$ *nazywamy elementem* największym, *jeśli*

$$\forall y \in X : y \lhd x$$

**Ćwiczenie:** jaka jest równica miedzy tymi definicjami?
Analogicznie możemy zdefiniować elementy minimalne i najmniejsze.

**Definicja 1.9.5** *Niech* $(X, \lhd)$ *będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Element* $x \in X$ *nazywamy elementem* minimalnym, *jeśli*

$$\forall y \in X : y \lhd x \Rightarrow x = y.$$

**Definicja 1.9.6** *Niech* $(X, \lhd)$ *będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Element* $x \in X$ *nazywamy elementem* najmniejszym, *jeśli*

$$\forall y \in X : x \lhd y$$

**Ćwiczenie i przykład:** niech będzie $A = \{1, 2, 3\}$. Rozważ $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. Podaj przykłady elementów najmniejszych, największych, minimalnych i maksymalnych.

**Ćwiczenie:** co się stanie jeśli rozważymy teraz $(\mathcal{P}(A) \setminus \{A\}, \subseteq)$ lub $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$?

**Ćwiczenie:** zastanów się czy zawsze muszą istnieć elementy: najmniejszy, największy, minimalny i maksymalny. Podaj przykłady zbiorów i porządków na nich, które nie mają każdego z podanych rodzajów elementów.

**Ćwiczenie:** znajdź wszystkie elementy najmniejsze, największe, minimalne i maksymalne w zbiorze $(\mathbb{N}, |)$.

**Definicja 1.9.7** *Niech* $(X, \lhd)$ *będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Niech* $A \subset X$ *będzie dowolnym podzbiorem* $X$.

- ograniczeniem górnym zbioru $A$ w $X$ *jest każdy element* $y \in X$ *taki, że* $\forall x \in A : x \lhd y$
- ograniczeniem dolnym zbioru $A$ w $X$ *jest każdy element* $y \in X$ *taki, że* $\forall x \in A : y \lhd x$

Definicja najmniejszego elementu może się przydać teraz aby określić *kresy* zbiorów.

**Definicja 1.9.8** *Niech* $(X, \triangleleft)$ *będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Niech* $A \subset X$ *będzie dowolnym podzbiorem* $X$*.*

- kresem górnym zbioru $A$ w $X$ *nazywamy najmniejsze ograniczenie górne zbioru* $A$ *w* $X$*;*
- kresem dolnym zbioru $A$ w $X$ *nazywamy największe ograniczenie dolne zbioru* $A$ *w* $X$*.*

**Ćwiczenie:** w zborze $(\mathbb{Q}, \leq)$ podać ograniczenia dolne i górne, oraz kresy dolne i górne zbiorów: $[1, 2]$, $(1, 2)$, $[1, 2)$, $(1, 2]$,

**Ćwiczenie:** niech $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. Czy zbiór ten posiada ograniczenia dolne i górne w $X = \mathbb{Q}$? Czy posiada kresy dolne i górne w $X = \mathbb{Q}$?. Co jeśli zbiór zostanie ten sam, ale weźmiemy $X = \mathbb{N}$ albo $X = \mathbb{R}$?

**Ćwiczenie:** Niech $X = \mathcal{P}(A)$ dla pewnego $A$, oraz rozważmy $(X, \subseteq)$. Zastanowić się jakie są kresy dolne i górne zbioru $B = (A_1, A_2, \cdot A_n)$, gdzie zbiory $A_i \subset A$.

## 1.10 Relacje wieloargumentowe

**Definicja 1.10.1** *Niech* $X_1, X_2, ..., X_n$ *będą dowolnymi zbiorami.*
*Dowolny podzbiór* $R \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ *nazywamy* relacją $n$-argumentową.

Niestety, w przeciwieństwie do relacji 2-argumentowych (na $X \times Y$), notacja *infiksowa* $xRy$ nie zadziała i raczej musimy stosować notację standardową $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$.

**Przykład (D. Wilczak)**: Przyjmijmy następujące oznaczenia.

- $K$ to zbiór wszystkich klas (zbiorów uczniów) w ILO w Krakowie,
- $N$ to zbiór wszystkich nauczycieli,
- $S$ to zbiór wszystkich sal, w których odbywają się lekcje,
- $T$ to zbiór wszystkich możliwych terminów zajęć, kiedy odbywają się lekcje,
- $P$ to zbiór wszystkich przedmiotów prowadzonych w ILO w Krakowie.

Przy takich oznaczeniach harmonogram ustalony na bieżący rok szkolny może być widziany jako pięcioargumentowa relacja $H \subset K \times N \times S \times T \times P$. Harmonogram składa się z piątek $(klasa, nauczyciel, sala, termin, przedmiot)$. Jeśli $(k, n, s, t, p) \in H$ to elementy tworzące tą piątkę są powiązane ze sobą (są w relacji) w następującym sensie: klasa $k$ ma lekcję z nauczycielem $n$ w sali $s$, w terminie $t$ z przedmiotu $p$. Oczywiście nie każdy taki $H$ ma sens. Musimy na przykład odrzucić takie piątki, gdzie ten sam nauczyciel prowadzi zajęcia o tej samej porze dla różnych klas w dwóch różnych salach. Analogicznie klasa nie może mieć dwóch różnych lekcji o tej samej porze w różnych salach. Musimy tez zapytać, czy nauczyciel j. polskiego może prowadzić zajęcia z matematyki i vice versa...

Relacje wieoargumentowe i badanie ich własności ma szerokie zastosowanie w informatyce: nie bez powodu najpopularniejsze (ciągle jeszcze) bazy danych nazywane są *relacyjnymi*.