Rozdział 1

Moc zbiorów

Dla zbiorów skończonych łatwo jest powiedzieć ile każdy z nich ma elementów. Ta liczba elementów (moc zbioru) jest liczbą naturalną. Dwa zbiory maja tyle samo elementów, jeśli ich moc, wyrazona liczbą, jest taka sama. Np. zbiór liczb $X = \{1, 2, 3\}$ ma taką samą moc jak zbiór liter $\{a, b, c\}$, czy zbiór $\{\pi, e, \gamma\}$ znanych stałych matematycznych. Ich moc to oczywiście 3. Moc zbioru będziemy oznaczać poprzez $\#X$.

Definicja 1.0.1 (Naiwna definicja równoliczności) *Dwa zbiory X i Y nazywamy* równolicznymi*, jeśli liczba ich elementów jest taka sama, tzn. $\#X = \#Y$.*

Co w sytuacji, gdy zbiór ma nieskończenie wiele elementów? Np. zbiór liczb Naturalnych $\mathbb{N}$? Intuicyjnie wiemy, że jest ich nieskończenie wiele, bo gdyby był skończony, to istniałaby liczba największa, nazwijmy ją n. Ale wtedy $m = n + 1$ też jest liczbą naturalną, większą od największej n. Doprowadziliśmy do sprzeczności, tak więc w zbiorze liczb naturalnych nie ma liczby najwiekszej i w związku z tym musi byc ich nieskończenie wiele.

Mozna oczywiście napisać, że $\#\mathbb{N} = \infty$ i rpzejśc z tym do porządku dziennego. Wtedy jednak gdy przejdziemy do innego zbioru nieskończonego, np. $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{Z}$. Tu nasuwa się pytanie, czy $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N}$ lub $\#\mathbb{R} = \#\mathbb{N}$?

Weźmy prostszy zbiór, $P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ jest liczbą parzystą}\}$. Pytamy, czy $\#P = \#\mathbb{N}$? Z jednej strony, wydawać by się mogło, że odpowiedź jest natychmiastowa, bo $P \subset \mathbb{N}$ - każdy element $n \in P$ siedzi jednocześnie (jest elementem) $\mathbb{N}$: $n \in \mathbb{N}$. Lub całe poprzednie zdanie skrócic do zwięzłego: $\forall_{n \in P} n \in \mathbb{N}$ (czytamy: dla każdego n ze zbioru P, n jest elementem $\mathbb{N}$. Dlatego ilość elementów $\#P \leq \#\mathbb{Z}$. Ktoś mógłby od razu napisać, że $\#P < \#\mathbb{Z}$, pokażemy jednak, że jest to nieprawda!

Aby to pokazać dobierzemy liczby $p \in P$ i $n \in \mathbb{N}$ w pary, tak, że każdej liczbie p będzie odpowiadać jedna i tylko jedna liczba z n. Oczywiście, dla zbiorów skończonych X, Y można tego dokonoać wtedy i tylko wtedy, gdy $\#X = \#Y$ i stąd czerpiemy naszą inspirację. Jeśli elementy dwóch zbiorów da się dobrac w pary, to muszą być te zbiory równoliczne.

Zatem, każdej liczbie $n \in \mathbb{N}$ przypisuję w parze liczbę $p = 2n$. Ta liczba jest oczywiście parzysta. Zobaczmy, że każda liczba $n \in \mathbb{N}$ ma swoja parę, wystarczy ją policzyć. Załóżmy teraz, że jest taka liczba parzysta p, że jest w parze z dwoma różnymi liczbami $n, m \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy $2n = p = 2m$, czyli $2n = 2m$ i dzieląc obie strony przez 2 dostajemy, ze $n = m$. Sprzeczność z założeniem, że $m \neq n$.

1.1 Nieskończony hotel

Polecam obejrzeć film na temat Hotelu Hilberta, aby przekonać się jakie problemy pojawiają się (ale i jakie mozliwości!), gdy mamy do czynienia ze zbiorami nieskończonymi.

`https://www.youtube.com/watch?v=OxGsU8oIWjY`

1.2 Funkcje

Aby dobrze zdefiniować pojęcie **równoliczności zbiorów** musimy najpierw poznać definicje funkcji.

Definicja 1.2.1 *Niech X, Y będą dowolnymi zbiorami.*

Funkcja $f : X \to Y$ to obiekt, który każdemu elementowi ze zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element ze zbioru Y. Przyporządkowanie to zapisujemy jako $f(x) = y$. Matematyczny zapis definicji to:

$$\forall_{x \in X} \exists! y \in Y : f(x) = y \tag{1.1}$$

Zbiór X w definicji nazywamy dziedziną lub zbiorem argumentów. Każdy element $x \in X$ nazywamy argumentem.

Zbiór Y w definicji nazywamy przeciwdziedziną.

Podzbiór $Y' \subset Y$ taki, że $\forall y \in Y' \exists x \in X : f(x) = y$ nazywamy zbiorem wartości funkcji, lub inaczej obrazem funkcji f. Obraz funkcji będziemy oznaczać $f(X)$. Można to sobie wyobrazić jako ewaluowanie f na każdym z $x \in X$ osobno i stworzenie zbioru ze wszystkich możliwych wyników: $Y' = f(X) = \{f(x) : x \in X\}$

Przyjrzyjmy się kilku przykładom znanych funkcji (i nie-funkcji - tzn. obiektom, które nie spełniają definicji).

Najlepiej znanymi przykładami funkcji są funkcje zadane wzorem matematycznym, np.:

- **Przykład 1:** funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ jest funkcją. Łatwo sprawdzić, że f wysyła każdy x w dokładnie jedną wartość y. Wykresem funkcji w układzie współrzędnych jest linia prosta, przechodząca przez punkty $(0, 0)$ i np. $(1, 2)$.

- **Przykład 2:** funkcja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 2x$ też jest funkcją! Jest to formalnie rzecz biorąc inna funkcja niż ta z Przykładu 1, bo ma inną dziedzinę i przeciwdziedzinę!. Co więcej, funkcja $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest znów zupełnie inną funkcją! Stąd bardzo wazne jest podawanie wraz z definicją funkcji jej dziedziny i przeciwdziedziny.

  Wykresem funkcji g jest zbiór punktów o współrzednych całkowitych leżących na prostej wykresu funkcji f. Tak samo jest w przypadku funkcji h! (prosze sprzawdzić!).

- **Przykład 3:** funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = 1$ (funkcja stała), jest funkcją. To nic, że nieskończenie wiele x-ów otrzymuje tę samą wartość: 1. Ważne jest, ze dla każdego z x jest jakaś wartość.

- **Nie-przykład 4:** prosta przechodząca przez punkty $(0, 0)$ i $(0, 1)$ (pionowa) nie jest funkcją z osi x do osi y, ponieważ jeden $x = 0$ ma nieskończenie wiele wartości, które są „nad nim" na wykresie.

  Uwaga dla zainteresowanych: można zamienić rolę osi x i y i zdefiniowac funkcję $f(y) = 0$. Będzie to ta sama prosta, jednak dziedzina funkcji jest formalnie rzecz biorąc inna. Dlatego czasem jest wazny znany z fizyki układ współrzednych!

- **Nie-przykład 5:** okrąg na płaszczyźnie nie będzie wykresem żadnej funkcji, nie ważne jak ułożymy układ współrzędnych.

- **Nie-przykład 6:** funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ nie jest funkcją, ponieważ ma niezdefiniowaną wartość dla $x < 0$ (pierwiastek z liczby ujemnej).

- **Nie-przykład 7:** funkcja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ nie jest funkcją, ponieważ dla każdej liczby dodatniej istnieją dwa pierwiastki, jeden dodatni, a drugi ujemny!

- **Przykład 8:** funkcja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\sqrt{x}|$ jest funkcją, gdyż wybraliśmy dodatni pierwiastek i wtedy jest on jedyny!

- **Przykład 9:** funkcja $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|\sqrt{x}|$ też jest funkcją.

Funkcje można też definiować podając wszystkie przyporządkowania. Jest to czasem przydatne dla zbiorów skończonych.

- **Przykład 10**: przyporządkowania $f, g, h, i : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ takie że $f(0) = 0$ i $f(1) = 0$; $g(0) = 1$ i $g(1) = 1$; $h(0) = 1$ i $h(1) = 0$; oraz $i(0) = 0$, $i(1) = 1$ są funkcjami. Są to jedyne funkcje jakie można stworzyć przy tak zadanych dziedzinie i przeciwdziedzinie.

  Zbiorami wartości tych funkcji są odpowiednio $\{0\}$ dla f, $\{1\}$ dla g, $\{0, 1\}$ dla h oraz i.

- **Nie-przykład 11** odwzorowanie $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ zdefiniowane jako $f(0) = 1$ nie jest funkcją, gdyż nie zdefiniowalismy jaką ma wartośc dla $x = 1$.

- **Nie-przykład 12** odwzorowanie $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ zdefiniowane jako $f(0) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(1) = 1$ nie jest funkcją, gdyż przyporządkowuje 0 dwie różne wartości.

- **Przykład 13 (z gwiazdką)** odwzorowanie $f : \{0, 1\} \to 2^{\{0,1\}}$ zdefiniowane jako $f(0) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(1) = 1$ **jest funkcją** (dlaczego?). Równoważnie, f można zapisać jako $f(x) = \{0, 1\}$. Uwaga: przypominam, że napis 2^Y oznacza zbiór wszystkich podzbiorów Y.

Funkcje mogą być zdefiniowane także bardziej abstrakcyjnie, lub na zbiorach, które nie są zbiorami liczb:

- **Przykład 14**: Funkcja f idąca ze zbioru słów w języku polskim do zbioru liter w polskim alfabecie, która każdemu słowu przyporządkowuje jego pierwszą literę jest funkcją.

- **Przykład 15**: Funkcja f idąca ze zbioru słów w języku polskim do zbioru liter w polskim alfabecie, która każdemu słowu przyporządkowuje jego ostatnią literę jest funkcją.

- **Nie-Przykład 16**: Przyporządkowanie f idące ze zbioru słów w języku polskim do zbioru liter w polskim alfabecie, która każdemu słowu przyporządkowuje jego drugą literę nie jest funkcją. Dlaczego?

- **Przykład 17**: Przyporządkowanie f idące ze zbioru osób do zbioru liczb rzeczywistych, przyporządkowujące każdej osobie jej aktualny wzrost jest funkcją.

- **Nie-Przykład 18**: Przyporządkowanie f idące ze zbioru osób do zbioru liczb naturalnych, przyporządkowujące każdej osobie jej numer PESEL nie jest funkcją. Dlaczego? Ponieważ nie każda osoba na ziemi ma przypisany polski numer PESEL.

Jak naprawiać „zepsute" funkcje. Nie zawsze jest to rozsądne, ale czasem się przydaje

- jeśli funkcja jest niekreślona dla jakiegoś argumentu x - wyrzucić ten argument z dziedziny, ALBO

- jeśli funkcja jest niekreślona dla jakiegoś argumentu x - przydzielić jej jakąś ustaloną wartość, ALBO

- jeśli funkcja jest niekreślona dla jakiegoś argumentu x - przydzielić jej jakąś ustaloną wartość, która nie jest w przeciwdziedzinie i tą wartość dodać do przeciwdziedziny,

- jeśli funkcja dla x przyjmuje wiele wartości, można rozważać badać funkcje $f : X \to 2^Y$, są to tak zwane funkcje wielowartościowe (multifunkcje).

Zadania

1. W Przykładzie 10 widzieliśmy, że dla dziedziny i przeciwwdziedziny równej $\{0, 1\}$ mogliśmy otrzymać 4 różne funkcje. Pytanie: ile jest różnych funkcji $f : X \to Y$ jeżeli $\#X = n$ i $\#Y = m$? Odpowiedź uzasadnij.

2. Czy funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = 1/x$ jest dobrze zdefiniowana? Odpowiedź uzasadnij. Jeśli nie, w jaki sposób można ją „naprawić”?

3. Jaki jest zbiór wartości funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$? Odpowiedź możesz uzasadnić wykresem (przybliżonym).

4. (*) Uzasadnij Przykład 13.

Rysowanie wykresów

Strony `https://www.wolframalpha.com/` można używac do rysowania funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wystarczy wpisać jej wzór do okienka wyszukiwania.

Przykładowo, przejście na stronę:
`https://www.wolframalpha.com/input?i=f%28x%29+%3D+sin%28x%29`
narysuje wykres funkcji sinus $f(x) = \sin(x)$ (i poda kilka przydatnych wiadomości na jej temat).

1.3 Funkcje - rodzaje

Podamy prosty podział funkcji, który będzie nam potrzebny w późniejszym czasie.

Definicja 1.3.1 *Funkcja $f : X \to Y$ nazywana jest surjekcją (lub funkcją typu „na”), jeżeli dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ taki, że $f(x) = y$*

Uwaga: porównaj tą definicję z Definicją 1.2.1 samej funkcji. Jakie widzisz różnice?

Definicja 1.3.2 *Funkcja $f : X \to Y$ nazywana jest injekcją (lub funkcją różnowartościową), jeżeli $f(x_1) \neq f(x_2)$ dla każdych x_1, x_2 takich, że $x_1 \neq x_2$.*

Zadanie (*): napisz powyższe definicje w języku formuł matematycznych ($\forall, \exists, \Rightarrow$, itp).

Definicja 1.3.3 *Funkcja $f : X \to Y$ nazywana jest bijekcją jeżeli jest jednocześnie injekcją i suriekcją.*

Kilka przykładów:

- Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ jest bijekcją. Łatwo widać, że jeśli $x_1 \neq x_2$ to $2x_1 \neq 2x_2$, oraz, że jeśli mamy y zadany, to $x = \frac{y}{2}$ jest odpowiadającym jej argumentem z dziedziny.

- Funkcja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$ jest injekcją. Nadal zachodzi, że jeśli $x_1 \neq x_2$ to $2x_1 \neq 2x_2$. Natomiast liczby nieparzyste nie mają swojego argumentu, np. żadna liczba x nie jest mapowana do wartości $y = 3$.

- Funkcja $g : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(x) = 2x$, gdzie $2\mathbb{N}$ oznacza liczby parzyste jest bijekcją! Proszę to przemyśleć! Tutaj znów widać, jak ważne jest określenie dziedziny!

- Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ nie jest ani injekcją (bo np. $f(0) = f(1) = 2$) ani suriekcją, bo np. nie ma żadnego x takiego, że $f(x) = 128$

Zadania

1. Które z funkcji z Przykładu 10 z poprzedniego podrozdziału są bijekcjami, injekcjami, suriekcjami?

2. Niech $\#X = n \in \mathbb{N}$ (zbiór skończony). Czy da sie podać przykład funkcji $f : X \to X$ taki, że f jest suriekcją, ale nie jest bijekcją?

3. Niech $\#X = n < \infty$, $\#X = m < \infty$. Kiedy da sie podać przykład funkcji $f : X \to Y$ taki, że f jest suriekcją, ale nie jest bijekcją? Przy jakim warunku na n, m dowolna funkcja $f : X \to Y$ jest suriekcją? Odpowiedzi uzasadnij.

4. Uzasadnić, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ jest bijekcją wtedy i tylko wtedy gdy $a \neq 0$.

5. Uzasadnij, że jeśli $f : X \to Y$ jest injekcją, to $g : X \to f(X)$ dana wzorem $g(x) = f(x)$ jest bijekcją.

1.4 Funkcje - identyczność

Istnieje jedna specjalna funkcja, która jest zawsze zdefiniowana dla dowolnego zbioru. Różnie się ją oznacza, poprzez i, I lub nawet dwuliterowo jako Id (najczęściej).

Dla dowolnego X zdefiniujmy:

$$Id : X \to X \tag{1.2}$$

$$Id(x) = x \tag{1.3}$$

Id jest poprawnie zdefiniowaną funkcją.

Jest to wyjątkowo funkcja zadana wzorem - jeśli zdefiniujemy inną funkcję np. $f(x) = x + 1$, to ta funkcja f będzie działac tylko na liczbach, ale już nie na zbiorach (np. nie zadziała z dziedziną równą $X = P(Y)$ dla jakiegoś zbioru Y lub na zbiorze słów w języku polskim). Identyczność jest wazna jeszcze z tego powodu, że pozwala zdefiniować pojęcie funkcji odwrotnej.

Jeśli będziemy chcieli podkreślić na jakim zbiorze działa identyczność napiszeny Id_X, co będzie oznaczać funkcję $Id_X : X \to X$.

UWAGA! Jesli $X \neq Y$ to $Id_X \neq Id_Y$! To formalnie nie sa te same funkcje!

1.5 Funkcje - funkcja odwrotna

Załóżmy, że mamy daną funkcję $f : X \to Y$. Czy mając taką funkcję da się łatwo zdefiniwać jakąś funkcję $g : Y \to X$? Kiedy ta się to zrobić? Czy da sie podać wzór?

Matematycy oczywiście znają rózne sposoby radzenia sobie z tego typu problemami, czasem w bardzo dziwaczny sposób, jednak jest jeden rodzaj funkcji, który znamy, a który pozwala w łatwy sposób (wzorem!) zdefiniować funkcję g. Tym rodzajem funkcji jest bijekcja.

Przypominamy z Definicji 1.3.3, $f : X \to Y$ jest bijekcją jeśli jest injekcją (Def. 1.3.2) i suriekcją jednocześnie (Def. 1.3.1).

Suriekcja mówi nam, że dla każdego y istnieje x taki że $y = f(x)$. Świetnie! Dzięki temu możemy spróbowac każdemu y przypisac wartość:

$$g(y) = x \text{ taki, że } f(x) = y. \tag{1.4}$$

Teraz nasuwa sie pytanie, czy może być tak, że mamy do wyboru dwa różne możliwe x? Odpowiedź jest przecząca, gdyż f jest injekcją i jeżeli $x_1 \neq x_2$ wtedy $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Dlatego, dla jednego y mamy tylko jeden wybór x.

Funkcję g nazwiemy funkcją odwrotną do f. Jeśli po lewej stronie podstawimy $y = f(x)$ dostaniemy:

$$g(f(x)) = x \tag{1.5}$$

Stosując pewien trik - w pewnym sensie „mnożenie” przez funkcję z obu stron (jak w rozwiązywaniu równań) możemy napisać:

$$f(g(f(x))) = f(x) \tag{1.6}$$

I teraz znów stosujemy podstawienie $y = f(x)$ aby otrzymać:

$$f(g(y)) = y. \tag{1.7}$$

To zachodzi dla każdego $y \in Y$. Własnie udało nam się pokazać, że funkcją odwrotną do g jest f! Czyli bijekcje egzystują w matematyce w parach: każda z nich ma swoją odrotną i odwrotną do odwrotnej jest funkcja wejściowa. To tak jak z ułamkami zwykłymi: liczbą odwrotną do a jest liczba $\frac{1}{a} = a^{-1}$ a liczbą odwrotną do $\frac{1}{a}$ jest

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = (a^{-1})^{-1} = a^{-1\cdot -1} = a^1 = a.$$

Zgodnie z tą intuicją, będziemy oznaczac funkcję odwrotną do danej (jesli istnieje) poprzez f^{-1}, tzn. $f^{-1} = g$ jak w definicji (1.4).

1.6 Funkcje - znajdowanie odwrotnej

Dla funkcji zadanej wzorem, np. $f(x) = 2x - 1$ łatwo jest znaleźć odwrotną (jesli istnieje), również zadaną wzorem. Wiemy, ze funkcja $f : X \to Y$, tzn dla każdego x przypisany jest y wzorem $y = f(x) = 2x - 1$ i ta zeleżność powinna być $1 : 1$. Tak więc wystarczy podać wzór na x (względem y), aby dostać wzór na funkcję f^{-1}.

$$y = 2x - 1 \tag{1.8}$$
$$y + 1 = 2x \tag{1.9}$$
$$\frac{y+1}{2} = x \tag{1.10}$$
$$x = \frac{y+1}{2} \tag{1.11}$$
$$\tag{1.12}$$

cyli wzór na funkcję $x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$. Jako ćwiczenie zostawiam sprawdzenie, że $f(f^{-1}(y)) = y$ oraz $f^{-1}(f(x)) = x$.

1.7 Funkcje - składanie funkcji

Równanie (1.5) coś nam powinno przypomninać. prosze popatrzeć na definicję identyczności w równaniu (1.3). To tak jakbyśmy powiedzieli, że funkcja definiowana jako $h(x) = g(f(x))$ była dana wzorem $h(x) = x$, czyli nota bene jest po prostu identycznością!

Pytanie: jaka jest (najbardziej oczywista/logiczna) dziedzina i przeciwdziedzina funkcji h?

Pytanie: jaka jest (najbardziej oczywista/logiczna) dziedzina i przeciwdziedzina funkcji zdefiniowanej jako $\bar{h}(x) = g(f(x))$?

Definiowanie nowych funkcji z już istniejących poprzez obliczanie wartości jednej funkcji na wyniku zwróconym z innej funkcji nazywa się *składaniem funkcji.*

Definicja 1.7.1 *Mając dane funkcje $g : X \to Y$ i $f : Y \to Z$ możemy zbudowac funkcję*

$$h \quad : \quad X \to Z \tag{1.13}$$

$$h(x) \quad = \quad f(g(x)), \quad \forall x \in X, \tag{1.14}$$

którą nazwiemy złożeniem funkcji f z g. Funkcję h oznaczymy jako $f \circ g$, tzn, $h := f \circ g$ i $(f \circ g)(x) = h(x)$.

Uwaga! Złożenie funkcje nie jest przemienne! $f \circ g \neq g \circ f$! Może sie tak zdarzyć, że o ile $f \circ g$ istnieje, to $g \circ f$ nie, bo z jakiegos powodu nie wolno nam policzyć $g(f(y))$ dla pewnego y.

Przykłady

1. Niech $g(x) = 2 \cdot x + 1$ i $f(x) = x^2$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wtedy $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 1$ i $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x + 1$ (dlaczego??).

2. Niech $f : X \to Y$ bedzie bijekcją, wtedy $f \circ f^{-1} = Id_Y$ a $f^{-1} \circ f = Id_X$ (dlaczego??).

3. Niech $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ $f(x) = |\sqrt{x}|$ natomiast $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x$. Wtedy $g \circ f$ istnieje oraz $(g \circ f)(x) = -|\sqrt{x}|$, natomiast $f \circ g$ nie istnieje. (Dlaczego?? Podpowiedź: policzyć $f(g(x))$ dla $x > 0$).

1.8 Iloczyn kartezjaski

Definicja 1.8.1 *Iloczynem kartezjańskim zbiorów X i Y, oznaczanym jako $X \times Y$, nazywamy zbiór*

$$Z = X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\},$$

gdzie (x, y) jest parą uporządkowaną.

Klasycznym przykładem jest płaszczyzna rzeczywista $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, która składa się ze wszystkich punktów o współrzednych (x, y).

Dla uproszczenia, będziemy pisać $X^1 = X$, $X^2 = X \times X$, oraz $X^k = X \times X^{k-1} = X \times (X \times (\ldots \times X)\ldots)$ (k razy). „Oficjalnie" rzecz ujmując „obiektami" np. $X \times Y \times Z \times W$ powinny być twory $(x, (y, (z, w)))$, ale my bedziemy „sprytniejsi" i będziemy wpisać $(x, y, z, w) \in X \times Y \times Z \times W$. Wartosci x, y, z, w nazywamy współrzednymi. Standardowa przestrzeń 3D w której żyjemy to $\mathbb{R}^3$ i czesto jej współrzedne zapisujemy jako (x, y, z).

Łatwo sobie wyobrazić, że w matematyce możemy się posługiwać bardzo „dużymi" zbiorami $\mathbb{R}^k$, k - duże. Wtedy możemy pisać: $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Teraz już możemy mysleć w przestrzeni 10, 12, 100 wymiarowej :)

1.9 Równoliczność zbiorów

Dla zbiorów skończonych X wiemy, że $\#X = n \in \mathbb{N}$ i bardzo łatwo powiedzieć, kiedy dwa zbiory są *równoliczne*, porównując po prostu wartośc n dla obu z nich.

Na zajęciach (i na filmie) widzieliśmy, że zbiory nieskończone wymykają się takiej łatwej definicji. Dlatego wprowadzmy nastepującą i bardzo prostą:

Definicja 1.9.1 *Zbiór X jest równoliczny ze zbiorem Y wtedy tylko wtedy jeśli istnieje bijekcja $f : X \to Y$.*

Równoliczność zapisujemy jako $X \sim_M Y$.

Podamy też (jedną z) definicji zbioru skończonego:

Definicja 1.9.2 *Zbiór X nazywamy skończonym jeśli $X \sim_M \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.*

Zbiór nazywamy nieskończonym *jeśli nie jest skończony.*

Zadanie pomocnicze Niech $\#X = n \in \mathbb{N}$, $\#Y = m \in \mathbb{N}$. Uzasadnić, że $X \sim_M Y$ wtedy i tylko wtedy gdy $m = n$.

Zadanie pokazuje, że teoria równoliczności dla zbiorów skończonych „pasuje" do teorii ogólnej.

Twierdzenie 1.9.1 *Równoliczność ma własności:*

1. $A \sim_M A$, *(zwrotność)*
2. *jeżeli* $A \sim_M B$ *to* $B \sim_M A$, *(symetryczność)*
3. *jeżeli* $A \sim_M B$ *i* $B \sim_M C$ *to* $A \sim_M C$, *(przechodniość)*

Zadanie pomocnicze (*) Uzasadnić (dowieść formalnie (*)) powyższe własności.

Twierdzenie 1.9.2 *Jeżeli* $X \subset \mathbb{N}$ *jest nieskończony, to* $X \sim_M \mathbb{N}$.

Zadanie (**): udowodnić Twierdzenie 1.9.2.

Definicja 1.9.3 *Zbiór* X *nazywamy* przeliczalnym *jeżeli* $X \sim_M N$ *dla pewnego* $N \subset \mathbb{N}$.

Zadanie: Podać przykłady zbiorów przeliczalnych.

Definicja 1.9.4 *Zbiór* X da sie ustawić w ciąg *jeżeli istnieje surjekcja* $f : \mathbb{N} \to X$.

Zadanie: Podać przykłady zbiorów, które da sie ustawić w ciąg i funkcji g „ustawiających" te zbiory w ciąg.

Twierdzenie 1.9.3 *Niepusty zbiór* X *daje się ustawić w ciąg wtedy i tylko wtedy, gdy jest przeliczalny.*

Zadanie (**) Uzasadnić (udowodnić) Twierdzenie 1.9.3.

Zadanie Wykaż, że podzbiór przeliczalnego zbioru jest przeliczalny.

Zadanie Wykaż, że suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.

Definicja 1.9.5 *Mówimy, że A jest na moc niewiększy (mniejszy lub równy) niż B (zapisujemy* $A \leq_M B$, *wtedy i tylko wtedy jeżeli istnieje injekcja* $f : A \to B$.

Mówimy, że A jest na moc mniejszy (silnie mniejszy) niż B (zapisujemy $A <_M B$, *wtedy i tylko wtedy jeżeli* $A \leq_M B$ *i nie prawda, że* $A \sim_M B$.

Analogia: dwie liczby, a i b, oraz $a \leq b$, $a < b$.

Zadanie: Uzasadnij, że jeżeli $A \subseteq B$ to $A \leq_M B$.

Zadanie: Uzasadnij, że jeżeli A, B skończone oraz $A \subsetneq B$ to $A <_M B$.

Twierdzenie 1.9.4 *Cantor-Bernstein Jeżeli $A \leq_M B$ i $B \leq_M A$ to $A \sim_M B$.*

Zadanie (**): Udowodnić Twierdzenie 1.9.4.

Twierdzenie 1.9.5 *Następujące warunki są równoważne:*

1. *jeżeli $A \leq_M B$ i $B \leq_M A$ to $A \sim_M B$, (Cantor-Bernstein),*
2. *jeżeli $A \leq_M B$ i $B \subset A$ to $A \sim_M B$,*
3. *jeżeli $A <_M B$ i $B <_M C$ to $A <_M C$,*

Zadanie (*): Udowodnić Twierdzenie 1.9.5.

Twierdzenie 1.9.6 $A <_M \mathcal{P}(A)$.
(Gdzie $\mathcal{P}(A)$ oznacza zbiór wszystkich podzbiorów A).

Zadanie (*): Udowodnić Twierdzenie 1.9.6.

Twierdzenie 1.9.7 *Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.*

Zadanie (*): Udowodnić Twierdzenie 1.9.7.

Podpowiedź: Niech A będzie zbiorem wszystkich zbiorów. Jak ma się A do $\mathcal{P}(A)$ i ich wzajemne moce?

1.9.1 Przykłady

1. Pokazać, że $\mathbb{N} \sim_M 2\mathbb{N}$ (zbiór liczb parzystych).

   Z Definicji 1.9.1 musimy podać bijekcję z $\mathbb{N}$ do $2\mathbb{N}$ tzn. $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ będącą bijekcją <u>lub na odwrót</u>, tzn. $g : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - bijekcję. W tym przypadku w obie strony jest łatwo, można podać funkcję prostym wzorem: $f(x) = 2 \cdot x$ lub analogicznie $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x$. Proszę zobaczyć, że $g = f^{-1}$, tzn. że dla każdego $x \in \mathbb{N}$ mamy $g(f(x)) = x$ oraz dla każdego $x \in 2\mathbb{N}$ mamy $f(g(x)) = x$.

   Alternatywnie, korzystając z Tw. 1.9.2, dla $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ (parzyste są podzbiorem naturalnych).

2. Pokazać, że $\mathbb{N} \sim_M k\mathbb{N}$ (zbiór liczb podzielnych przez $0 < k \in \mathbb{N}$).

   Podobnie, jak w zadaniu poprzednim dobra będzie $f : \mathbb{N} \to k\mathbb{N}$ $f(x) = k \cdot x$. Jako ćwiczenie: sprawdzić, że jest to bijekcja.

   Alternatywnie, korzystając znów z Tw. 1.9.2, dla $k\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$.

3. Pokazać, że (zbiór liczb podzielnych przez 3) $3\mathbb{N} \sim_M 2\mathbb{N}$ (zbiór liczb parzystych).

   Tutaj jest trochę trudniej, bo mamy podać bijekcję $f : 3\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ (lub na odwrót), gdzie żaden ze zbiorów nie jest podzbiorem drugiego. Zapis zbiorów podpowiada jednak, że poprawną funkcją f będzie $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x$ (dlaczego łatwo to widać z zapisu?). Teraz niech $x \in 3\mathbb{N}$, tzn. x jest podzielny przez 3, tzn $x = 3n$ dla pewnego n z naturalnych. Wtedy $f(x) = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot n = 2 \cdot n \in 2\mathbb{N}$ (bo $f(x) = 2n$ jest podzielne przez 2). Funkcja f jest funkcją liniową, więc jest injekcją. Czy jest suriekcją? Tak, bo jej odwrotna g, $f^{-1}(y) = g(y) = \frac{3}{2}y$ jest zdefiniowana dla każdego $x \in 2\mathbb{N}$ i dla każdego takiego $x = 2n$: $g(x) = \frac{3}{2}2n = 3n \in 3\mathbb{N}$.

   Inaczej, wiemy, z zadania poprzedniego że $f_k(x) = kx$ jest bijekcją $f_k : \mathbb{N} \to k\mathbb{N}$. Weźmy $f_2 : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ i $f_3 : \mathbb{N} \to 3\mathbb{N}$. Teraz, f_3^{-1} istnieje (bo f_3 jest bijekcją) i $f_3^{-1} : 3\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (bo odwracamy strzałki w funkcji i dziedizna staje się przeciwdziedziną i na odwrót). Funkcja $h = f_2 \circ f_3^{-1}$, $h(x) = f_2(f_3^{-1}(x))$ jest bijekcją (Patrz zadanie **Z.4**) i $h : 3\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$. Czyli $3\mathbb{N} \sim_M 2\mathbb{N}$. Co więcej, łatwo pokazać, że $f_3^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$ i funkcja $h = f$ - dokładnie ta sama, którą wybraliśmy w pierwszym dowodzie.

   Jeszcze inaczej, znów z zadania poprzedniego (lub z Twierdzenia 1.9.2), wiemy, że $k\mathbb{N} \sim_M \mathbb{N}$, czyli $3\mathbb{N} \sim_M \mathbb{N}$ i $2\mathbb{N} \sim_M \mathbb{N}$. Korzystając z Twierdzenia 1.9.1, wiemy że: $\mathbb{N} \sim_M 2\mathbb{N}$ (symetria), a nastepnie: $3\mathbb{N} \sim_M \mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \sim_M 2\mathbb{N}$ stąd $3\mathbb{N} \sim_M 2\mathbb{N}$ (przechodniość).

4. Przykład trudny: pokazać, że $\mathbb{N} \sim_M \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

   Najłatwiej w takich przypadkach zazwyczaj zacząć tam, gdzie mamy więcej współrzednych, tak, że pokażemy jak zbudować $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ - bijekcję. Rozpiszmy najpierw wszystkie pary $(x, y) \in \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jak punkty na płaszczyźnie, w tabeli:

$(0,0)$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(3,0)$	$(4,0)$	$\cdots$
$(0,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$\cdots$
$(0,2)$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$\cdots$
$(0,3)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(4,3)$	$\cdots$
$(0,4)$	$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,4)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Spróbujmy teraz wyobrazić sobie, że na każdej pozycji w tej tabeli kładziemy kolejna liczbę naturalną, ale w takiej kolejności jak dyktują ukośne przekątne (4 pierwsze zaznaczone na kolorowo). Kładziemy 0 na $(0,0)$, 1 na $(0,1)$, 2 na $(1,0)$, 3 na $(2,0)$ itd:

0	1	3	6	10	*itd*
2	4	7	11	$(4,1)$	$\cdots$
5	8	12	$(3,2)$	$(4,2)$	$\cdots$
9	13	$(2,3)$	$(3,3)$	$(4,3)$	$\cdots$
14	$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,4)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Wygląda na to, że to może pokryć całą tabelę tylko wartościami naturalnymi - ponieważ liczb naturalnych jest nieskończenie dużo, nigdy nam ich nie zabraknie.

Kiedy popatrzymy na każdą ukośna przekątną (cztery z nich zaznaczona na kolorowo), to dostrzeżemy pewną prawidłowość: suma $x+y=M$ jest na niej stała. Np. dla czerwonej przekątnej mamy $x+y=2$. Na przekątnej o jeden wyżej (zielonej) mamy $x+y=1$ a na tej poniżej (niebieskiej): $x+y=3$. Dodatkowo, ilość elementów które spełniają $x+y=M$ jest dokładnie $M+1$ i wszystkie te pary leżą na M-tej przekątnej (przekątna 0 zawiera tylko $(0,0)$, 1-sza zawiera $(0,1)$ i $(1,0)$ itd).

Stąd już można się domyślić, jak policzyć liczbę na każdej przekątnej w pierwszym rzędzie (tym „0, 1, 3, 6, 10, itd”), będzie ona równa wartości poprzednio „zużytych” liczb naturalnych. Dla M-tej przekątnej musimy zsumować ilość elementów na wszystkich poprzednich przekątnych: od przekątnej o numerze $M-1$ do tej o numerze 0. Odpowiednie ilości są o 1 większe niż numer przekątnej czyli sumujemy:

$$\sum_{i=0}^{M-1}(i+1)=\sum_{i=1}^{M} i=\frac{M\cdot(M+1)}{2}$$

Zatem wiemy, że

$$f((M,0)) = \frac{M \cdot (M+1)}{2}$$

Jakie jeszcze elementy leżą na przekątnej razem z $(M, 0)$? Jest to: $(M-1, 1)$, $(M-2, 2)$, itd. (Pamiętamy, ze suma $x + y = M$ na przekątnej M! Dlatego jak zmieniamy drugą współrzędną na większą, to musimy odpowiednio zmniejszyć pierwszą współrzędną poruszając się po przekątnej).

Ile wynosi zatem $f((M-n, n))$?, proponuję ustawić:

$$f((M-n,n)) = \frac{M \cdot (M+1)}{2} + n \tag{1.15}$$

dzięki czemu przypisanie zachowuje się dokładnie tak jak pokazano w tabelce - gdy poruszamy się po przekątnej, to przypisujemy kolejną liczbę naturalną. Możemy to sprawdzić na przykładzie $M = 2$: $f((2,0))f((M-n,n)) = \frac{2 \cdot 3}{2} + 0 = 3$, $f((1,1)) = 3+1$, $f(0,2) = 3+2 = 5$. Działa!

Jako ostatni krok, wyeliminujemy $M-n$, i n i zastąpimy je x, y. Wiemy, że na M-tej przekątnej:

$$M = x + y \tag{1.16}$$
$$n = y \tag{1.17}$$

stąd

$$x + n = M \tag{1.18}$$
$$M - n = x \tag{1.19}$$

czyli, zamieniamy M, n, $M-n$ na odpowiednio $x+y$, y, x, dostajemy:

$$f((x,y)) = \frac{(x+y) \cdot (x+y+1)}{2} + y$$

I jest to szukana bijekcja. jako ćwiczenie można udowodnić, że jest injekcją oraz surjekcją.

Interesujące może być znalezienie $f^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{N}$. Mamy „na wejściu” $z = f(x,y)$ (lub równoważnie: $z = f(M-n,n)$) i chcemy „odzyskać” informację o x, y (lub M i n, a z nich już wyliczymy x, y za pomocą równań (1.16)-(1.19)). Przykładowo: niech $z = 225$. Ile wynosi M i n? Odpowiedź nie jest taka prosta. Można to zrobić algorytmicznie:

(a) weź $M = 0$

(b) policz $s = \frac{M\cdot(M+1)}{2}$

(c) policz $n = z - s$

(d) jeżeli $n \leq M$ (dlaczego tak?) to znaleźliśmy M i n - koniec programu.

(e) w przeciwnym przypadku - ustaw $M = M + 1$ (zwiększ M) i przejdź do punktu (b).

I już, algorytm działa, można zaprogramować (np. w języku Python jak na zajęciach) wiec taka funkcja istnieje także i w teoretycznej matematyce!

Spróbujemy jednak jeszcze znaleźć wzór matematyczny. Do tego będę potrzebował następującej funkcji $P : [0, \infty) \to \mathbb{N}$:

$$P(x) = \text{ największa liczba naturalna } n \text{ taka, że } n \leq x \tag{1.20}$$

Funkcja P „obcina” część ułamkową z liczby $x \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Np. $P(\pi) = 3$, $P(2.5) = 2$, $P(0.01) = 0$, $P(2) = 2$, itp. Zwyczajowo taką funkcję nazywa się „podłogą z liczby” i oznacza $P(x) = \lfloor x \rfloor$. Jest druga funkcja, „sufit”, która dopełnia liczbę do najbliższej (najmniejszej) naturalnej, oznaczana $\lceil x \rceil$. Np. $\lceil 2.5 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$ ale uwaga: $\lceil 2 \rceil = 2$.

Mamy więc nasze dane $z = f((M - n, n))$ i chcemy poznać najpierw M. Popatrzmy na Równanie (1.15). Widać, że M występuje w nim w pewnym sensie jako M^2 bo mamy:

$$z = \frac{M \cdot (M + 1)}{2} + n \ = \ \frac{M^2 + M}{2} + n$$

mnożymy przez 2 obie strony:

$$2z = M^2 + M + 2n.$$

Gdyby nie było M i $2n$ wystarczyłoby wykonać pierwiastek aby wyliczyć $M = \sqrt{2n}$! Jak się tych wartości pozbyć? Wiemy, że $n \in \{0, \ldots, M\}$ (dlaczego? - ćwiczenie). Zatem

$$M^2 \leq M^2 + M + 0 \leq 2z = M^2 + M + 2n \leq M^2 + M + 2M = M^2 + 3M \tag{1.21}$$

(zamieniłem $2n$ na minimalną i maksymalną możliwą wartość). Niestety, jedyne co możemy wywnioskować, to

$$M^2 \leq 2z \leq M^2 + 3M < M^2 + 4M + 4 = (M + 2)^2$$

i pierwiastkując stronami (tylko dodatni pierwiastek bierzemy):

$$M \leq \sqrt{2z} < (M + 2)$$

Czyli $\lfloor\sqrt{2z}\rfloor = M$ ALBO $\lfloor\sqrt{2z}\rfloor = M + 1$. Przykładowo, z tabeli: na przekątnej czerwonej jeśli $z = 4$, to $\lfloor\sqrt{2 \cdot 4}\rfloor = \lfloor 2 \cdot 1.41...\rfloor = 2$ ale jeśli $z = 5$, to $\lfloor\sqrt{2 \cdot 5}\rfloor = \lfloor\sqrt{10}\rfloor = 3$! Która z tych możliwości zachodzi - to zależy od wartości n, której nie znamy. Możemy jednak zrobić dwa przypadki: jeśli $n < \frac{M+1}{2}$, to prawą część Równania (1.21) możemy poszacować lepiej aby dostać:

$$M^2 \leq M^2 + M + 0 \leq 2z = M^2 + M + 2n < M^2 + M + 2 \cdot \frac{M+1}{2} = (M+1)^2$$

i wtedy $\lfloor\sqrt{2z}\rfloor = M$. Jeśli natomiast $n \geq \frac{M+1}{2}$ to na pewno $\lfloor\sqrt{2z}\rfloor = M + 1$. Oznaczmy $A = \sqrt{2z}$, zatem $A = M$ ALBO $A = M + 1$ (nie wiemy który przypadek zachodzi). Jak teraz sprawdzić, który z nich? Porównajmy $A(A+1)$ z $2z$. Jeśli $A = M$ to $A(A+1) = M^2 + M \leq 2z$, co wynika z lewej strony Równania (1.21). Natomiast jeśli $A = M + 1$ to $A(A + 1) = (M + 1)(M + 2) = M^2 + 4M + 2 > 2z$ (!) To wynika tym razem z prawej strony Równania (1.21). Czyli M, jako funkcję z możemy dostać z następującego (nieprostego!) wzoru:

$$M(z) = \begin{cases} \lfloor\sqrt{2z}\rfloor & \text{jeśli } \lfloor\sqrt{2z}\rfloor \cdot (\lfloor\sqrt{2z}\rfloor + 1) \leq z \\ \lfloor\sqrt{2z}\rfloor - 1 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \tag{1.22}$$

Oczywiście teraz już łatwo dostać n, gdyż:

$$n(z) = z - \frac{M(z) \cdot (M(z) + 1)}{2} \tag{1.23}$$

(dlaczego?). Tak więc funkcja $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dana wzorem:

$$f^{-1}(z) = (x(z), y(z)) = (M(z) - n(z), n(z)) \tag{1.24}$$

jest szukaną funkcją odwrotną do $f(M,n)$ (dlaczego?). Jako ćwiczenie mogę zostawić wypisanie pełnego wzoru (zależnego tylko od z - trzeba podstawić za $M(z)$ i $n(z)$ odpowiednie wzory (1.22) i (1.23)).

Uffff.

Z tego przykładu widać, że znajdowanie wzoru na funkcję odwrotną może być niezwykle czasochłonne. Dlatego matematycy często są zadowoleni tylko z faktu, że coś *istnieje*, że można temu czemuś nadać nazwę, oraz jakie *własności* ma dany obiekt (np. że $f(f^{-1}(x)) = x$). Sam wzór natomiast nie jest taki istotny.

5. Pokazać, że $\mathbb{N} \sim_M \mathbb{N}^k$ dla dowolnego ustalonego k.

   Jako wstęp pokażemy, że $\mathbb{N}^{k-1} \sim_M \mathbb{N}^k$. Niech $k \geq 2$ będzie dane i niech f będzie funkcją $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ z poprzedniego zadania. Funkcja $g_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^{k-1}$ dana wzorem:

   $$g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = (f(x_1, x_2), x_3, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^{k-1} \tag{1.25}$$

   jest bijekcją. To łatwo widać, bo na pierwszej współrzędnej $f(x_1, x_2)$ (bijekcja), a na pozostałych współrzędnych mamy identyczność (też bijekcja). Jednym z zadań jest pokazanie, że zestawienie bijekcji jest bijekcją.

   Teraz aby skonstruować $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ musimy o kolei przejść po funkcjach g_k, zmniejszając k:

   $$F = g_2 \circ g_3 \circ \cdots \circ g_k \tag{1.26}$$

   Co odpowiada przechodzeniu po kolei przez zbiory:

   $$\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^{k-1} \to \mathbb{N}^{k-2} \to \cdots \to \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^1 = \mathbb{N}. \tag{1.27}$$

   Składanie dwóch bijekcji jest bijekcją a każda z funkcji g_k jest właśnie bijekcją.

1.9.2 ZADANIA

Zadanie są prezentowane w kolejności od najprostszych do najtrudniejszych (w mojej opinii). Rozwiązania zadań można do mnie wysłać na e-mail, tak samo jak wszelkie wątpliwości i prośby o podpowiedź.

Z.1 sprawdzić czy funkcja $f : X \to Y$ dana wzorem $f(x) = x^2 - 1$ jest bijekcją, injekcją lub suriekcją, jeżeli zbiory X, Y są dane jako:

(a) $X = \{1, 2\}, Y = \{0, 1, 2, 3\}$,

(b) $X = \{1, 2\}, Y = \{0, 3\}$,

(c) $X = \{-1, 0, 1\}, Y = \{-1, 0, 1\}$,

(d) $X = \{0, 1\}, Y =, \{-1, 0\}$,

(e) $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$,

(f) $X = [0, 1], Y = [-1, 0]$,

(g) $X = [0, 1], Y = [-1, 1]$,

(h) $X = [0, \infty), Y = \mathbb{R}$,

(i) $X = [0, \infty), Y = [-1, \infty)$,

(j) $X = (-\infty, 0], Y = [-1, \infty)$.

Z.2 Wypisać wszystkie możliwe funkcje $f : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$, ile jest takich funkcji? Które z nich (i ile) jest bijekcjami? Ile jest injekcjami i suriekcjami?

Z.3 Ile jest mozliwych funkcji $f : X \to X$ jeżeli $\#X = n$? Ile jest odpowiednio bijekcji, suriekcji i injekcji? Czy da się podać zwięzłe wzory na te ilości funkcji uzywając tylko liczby n?

Z.4 Pokazać, że jeżeli $f : Y \to Z$ i $g : X \to Y$ są obie jednoczesnie odpowiednio injeckjami/suriekcjami/bijekcjami to $f \circ g : X \to Z$ też jest odpowiednio injeckją/suriekcją/bijekcją.

Z.5 Jeżeli $f : X \to Z$ i $g : Y \to W$ są bijekcjami to $F(x, y) := (f(x), g(y))$, $F : X \times Y \to Z \times W$ jest bijekcją.

Z.6 TODO: więcej zadań.