Rozdział 1

Zajęcia 01 - Ciekawostki

Poniższy plik zawiera krótki przegląd ciekawostek i zagadek, którym będziemy przyglądać się dokładnie na kolejnych zajeciach (niekoniecznie w podanej kolejności).

Samodzielne rozwiązanie zagadki(zagadek) podanych na końcu przed rozwiązaniem ich na zajęciach (proszę przynieść rozwiązania na kartce / zdjęcie kartki wysłać na e-maila) uprawnia do otrzymania oceny celującej (patrz zasady organizacji zajęć).

1.1 „Szef wszystkich szefów”

Definicja 1.1.1 (Georg Cantor) *zbiór może być dowolną kolekcją **obiektów** zwanych **elementami**.*

Według tego podejścia zbiór jest pojęciem podstawowym i niedefiniowalnym (patrz aksjomat). Przykłady zbiorów:

- zbiór złożony z 1 i 2 (elementy zbioru liczb naturalnych),
- koło na płaszczyźnie, kula w przestrzeni (zbiory punktów),
- Zbiór osób będących teraz na tej sali
- Zbiór złożony ze sznurka, złotego pierścienia i jednego hobbita (zbiory mogą zawierać elementy nieistniejące w świecie rzeczywistym)
- nic (zbiór pusty)

- zbiór wszystkich podzbiorów innego zbioru, np. zbiór podzbiorów liczb naturalnych

W ogólności, kazdy zbiór X można zapisać w postaci:

$$X = \{x : p(x) = 1\}, \tag{1.1}$$

lub

$$X = \{x|p(x) = 1\}, \tag{1.2}$$

gdzie $p(x)$ jest **zdaniem logicznym** - funkcją, która dla każdego argumentu zwraca wartość **prawda** (obiekt należy do zbioru), zwyczajowo zapisywany jako liczba 1, lub **falsz** (obiekt nie należy), zwyczajowo piszemy 0.

ZBiory z przykładów (te matematycznie opisywalne) mozna np. zapisac tak:

- $X = \{1, 2\}$
- $X = B^2(c, r) = \{v \in \mathbb{R}^2 : (v_x - c_x)^2 + (v_y - c_y)^2 \leq r^2\}$
- $X = \emptyset$
- $X = \{y : y \subseteq Y\}$

Zobaczmy, że zbiór pusty ma swój własny symbol (specjalny), oraz, ze mamy notację bycia podzbiorem $X \subseteq Y$:

Definicja 1.1.2 *$X \subseteq Y$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego x w X mamy, że x jest elementem zbioru Y.*

Ponieważ to wiele pisania, dla skrócenia zapisu, przynależność obiektów będziemy zapisywać tak:

$$x \in X \text{ - obiekt należy do } X \text{ tj. } p(x) = 1 \tag{1.3}$$
$$x \notin X \text{ - obiekt nie należy do } X \text{ tj. } p(x) = 0 \tag{1.4}$$

Definicja 1.1.3 *$X \subseteq Y$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $x \in X$ mamy, że $x \in Y$.*

korzystając z dalszych skrótów notacyjnych można dojść do:

Definicja 1.1.4 $X \subseteq Y \iff \forall x : x \in X \Rightarrow x \in Y$

Ale tę notację rozwiniemy później, w miarę potrzeb.

Przykłady bycia podzbiorem i bycia elementem:

- liczba 3 *jest elementem* zbiorów: $\{3, 6, 9\}$, $\mathbb{N}$ liczb naturalnych, czy rzeczywistych $\mathbb{R}$. W matematycznym zapisie: $3 \in \{3, 6, 9\}$, $3 \in \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{R}$.

- liczba π *nie jest elementem* zbiorów: $\{3, 6, 9\}$ ani $\mathbb{N}$ (ponieważ jest liczbą niewymierną). Natomiast *jest elementem* zbioru $\mathbb{R}$. Matematycznie: $\pi \notin \{3, 6, 9\}$, $\pi \notin \mathbb{N}$, ale $\pi \in \mathbb{R}$.

- zbiór $X = \{1, 2, 3\}$ *jest podzbiorem* zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$, ponieważ każda z liczb $1, 2, 3$ *jest elementem* tych zbiorów. Natomiast X nie jest podzbiorem zbioru $Y = \{3, 6, 9\}$, ponieważ istnieje element zbioru X, który nie jest elementem Y - np. liczba 1. Matematycznie, piszemy $\{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$. Rzadko używany jest symbol nie bycia podbiorem: $X \nsubseteq Y$.

- zbiór $X = \{1\}$ *nie jest elementem* zbioru $\mathbb{N}$, tj. $\{1\} \notin \mathbb{N}$ (bo liczby naturalne składają się tylko z liczb, nie ma wśród nich żadnego zbioru, w szczególności zbioru złozonego z jednej liczby 1 - proszę dobrze to przemyśleć!). Natomiast zbiór $X = \{1\}$ *jest podzbiorem* zbioru $\mathbb{N}$, bo jedyny element z X, czyli liczba 1 jest elementem zbioru $\mathbb{N}$.

Pytanie: czy obiekt $\{0, \{0\}\}$ jest elementem zbioru $\{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}$? Czy może jest jego podzbiorem? A może jednym i drugim?

Definicja 1.1.5 *Zbiór X nazywamy* podzbiorem właściwym Y*, jesli $X \subseteq Y$ i $X \neq Y$.*

Definicja 1.1.6 *Zbiór nie zawierający żadnych elementów nazywamy* zbiorem pustym *i oznaczamy $\emptyset$ (zamiast $\{\}$).*

Definicja 1.1.7 *Zbiór złozony z jednego elementu, np. $\{3\}$, $\{Robert\}$, $\{\pi\}$, nazywamy* singletonem.

Definicja 1.1.8 *Zbiór złozony z dokładnie dwóch elementów, np. $\{3, 5\}$, $\{Robert, Adam\}$, $\{\pi, \sigma\}$, nazywamy* parą nieuporządkowaną*, lub czasem po prostu parą.*

Zbiory $\{a, b\}$ i $\{b, a\}$ to te same pary: $\{a, b\} = \{b, a\}$, gdyż w zbiorach nie ma znaczenia kolejność wypisania elementów.

Natomiast istnieje coś takiego jak *para uporządkowana*, oznaczana jako (a, b). Dla par uporządkowanych $(a, b) \neq (b, a)$ jeżeli $a \neq b$. Parami uporządkowanymi są np. punkty na płaszczyźnie. Obiektom postaci $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ przyjżymy się kiedy indziej.

Wróćmy teraz do Definicji 1.1.1. Jak widać, obiektem może być w zasadzie cokolwiek i ogranicza nas tylko nasza własna wyobraźnia. Wystarczy tylko wypowiedzieć magiczne matematyczne słowo „Niech":

„Niech X będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych."

I już! X właśnie stał się zbiorem wszystkich liczb pierwszych. I tak można „stworzyć" - powołac do życia - dowolny byt. Ale czy aby na pewno?

Zastanówmy się nad dwoma zbiorami (pierwszy z nich to tak jakby „szef wszystkich szefów" z tytułu rozdziału):

$$U = \{X : X \text{ jest zbiorem } \} \tag{1.5}$$
$$C = \{X : X \notin X\} \tag{1.6}$$

Czy takie zbiory rzeczywiście istnieją? Czy widać tu jakąś sprzeczność wewnętrzną? Jaką?

Zastanówmy się, czy $U \in U$ oraz czy $C \in C$? (bo przecież też są zbiorami, jako kolekcja <u>dowolnych</u> elementów, zgodnie z definicją 1.1.1!)

- Załóżmy, że C jest elementem C ($C \in C$). Ale wtedy C nie spełnia warunku $p(X) := X \notin X$ z definicji zbioru C (Równanie (1.6)), dlatego C nie może być w C
- No to w takim razie, załóżmy może, że C nie ma w C ($C \notin C$)? W takim razie C spełnia zdanie $p(X) := X \notin X$, to jest $p(C) = 1$ i C „siedzi" wygodnie w C ($C \in C$)!

Otrzymujemy sprzecznosc - nie da się zdecydować, czy C jest elementem C czy nie C! W takim razie C prawdopodobnie *w ogóle nie istnieje*! Stąd nie wszystkie *kolekcje obiektów* są zbiorami, i Definicja (1.1.1) wymaga dopracowania.

To jest trochę tak jak ze zdaniem (nadużywanym w grach rpg i książkach fantasy): „To co teraz mówię jest kłamstwem". Powiedziałem prawdę, czy kłamstwo? Sprawdzając przypadki: załóżmy, że powiedziałem prawdę. To wtedy zdanie jest nieprawdziwe (bo orzeka, że „mówię kłamstwo", a przecież założyłem, że mówię prawdę). Natomiast jeśli przyjjmiemy, że kłamię, to zdanie jest prawdziwe (czyli mówię prawdę). Ta wewnętrzna sprzeczność nazywa się *paradoksem.* Paradoks, który omówilismy to *paradoks kłamcy.* Paradoks w zbiorze zbiorów, które nie sią swoimi własnymi elementami, nazywa się zwyczajowo paradoksem Russela.

Jak się potem okaże, logika (badanie prawdziwości zdań) a teoria zbiorów (mnogości) będą miały ze soba bardzo wiele wspólnego. Na kolejnych zajęciach będziemy powoli przyglądać się sposobom poradzenia sobie z takimi *paradoksami.*

Na marginesie inna zagadka: W zamku znajduje się para drzwi (identyczne), za jednymi jest skarb, a drugie prowadzą do przepaści. Przy drzwiach stoi dwóch strażników (identycznych bliźniaków). jedyne co o nich wiadomo, to to, że jeden zawsze kłamie, a drugi zawsze mówi prawdę. Można zadać tylko jedno pytanie (dowolne). Jak zagwarantować sobie informację, które drzwi prowadzą do skarbu?

Dziedzina matematyki, która zajmuje się zbiorami to *Teoria Mnogości*, natomiast dziedzina zajmująca się formułowaniem i „formalizmem" w dowodzeniu twierdzeń jest *Logika.* Te dwie dziedziny są bardzo ściśle powiązane i nimi zajmiemy się na kilku dalszych lekcjach. Pozwolą one naprawić „naiwną" definicję zbioru i rozwiązać problem (większości) paradoksów.

1.2 Nieskończony hotel

Przykład, że naiwna logika zawodzi, gdy mamy do czynienia z nieskończonością.

https://www.youtube.com/watch?v=OxGsU8oIWjY

1.3 Wszystkie krowy są brązowe

Naiwny dowód przez indukcję. Dlaczego trzeba być ostrożnym. Zacznijmy jednak od prostego przykładu.

Wzór na sumę n pierwszych liczb całkowitych to:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.7}$$

Można ten wzór *udowodnić* indukcyjnie:

- dla $n = 1$ mamy $L = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = P$, więc wzór działa

- dla $n > 1$, załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla wszystkich $k < n$. Rozpisujemy: $L = \sum_{i=1}^{n} i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right) + n$. Ponieważ $n-1 < n$ to dla pierwszego elementu używamy *założenia indukcyjnego*:

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{i=1}^{n} = & (1.8)\\
&= \sum i = 1^{n-1} i + n \ = & (1.9)\\
&= \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + n \ = & (1.10)\\
&= \frac{(n-1)n + 2n}{2} \ = & (1.11)\\
&= \frac{n^2 - n + 2n}{2} \ = & (1.12)\\
&= \frac{n^2 + n}{2} \ = & (1.13)\\
&= \frac{n(n+1)}{2} \ = \ P & (1.14)
\end{aligned}
$$

Z dowolności n, wiemy, że wzór zachodzi dla każdego n.

A teraz przykład negatywny: „pokażemy" indukcyjnie, ze wszystkie krowy na świecie są takiego samego koloru. Będziemy po kolei rozpatrzać zbiory krów złozone z n krów.

- dla $n = 1$ każdy zbiór zawiera jedną krowę, więc siłą rzeczy ma ona tylko jeden kolor.

- w kroku indukcyjnym, dla $n > 1$, załóżmy, że wszystkie zbiory o liczności krów mniejszej niż n są jednokolorowe. Weźmy nasz zbiór X zawierający n krów i wyjmijmy z niego jedną, nazwijmy ją K_1. Z założenia indukcyjnego, pozostałe krowy muszą być tego samego koloru, nazwijmy go C. Teraz wyjmijmy z tego mniejszego zbioru (wszystkie krowy mają kolor C) inną krowę K_2 a w jej miejsce wstawmy krowę K_1. Nowy zbiór nadal ma liczność $n-1$ więc z założenia wszystkie krowy mają ten sam kolor. Ponieważ mniejszy zbiór miał kolor C to krowa K_1 też musi być koloru C.

W ten sposób pokazaliśmy, że wszystkie krowy na świecie są takiego samego koloru.

Zadanie: gdzie w rozumowaniu kryje się błąd?

Na marginesie: zasada indukcji matematycznej i wynikające z niej dowody to czesto ważne narzędzie w pracy każdego programisty. Dzięki tej metodzie można zaprojektować bardzo intuicyjne algorytmy o bardzo eleganckiej i łatwej do zrozumienia implementacji, a także dowieść poprawności ich działania (patrz: metoda dziel i zwyciężaj).

1.3.1 Prosta metoda indukcji

- Do udowodnienia mamy pewną własność, która zachodzi dla elementów numerowanych liczbami naturalnymi, nazwijmy to $P(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Zakłądamy, że $P(n)$ to zdanie logiczne, które zwraca „prawda" (1) lub „fałsz" (0). Np. $P(n) = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{k(k+1)}{2}$, lub $P(n) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zbiór n krów zawiera tylko krowy jednego koloru.

- Pokazujemy, że $P(n)$ zachodzi dla jakiejś małej liczby, zazwyczaj $n = 0$, ale może być inna (przykłądy dalej).

- Wykonujemy krok indukcyjny: zakładając, że $P(n) = 1$ pokazujemy, że $P(n + 1)$ jest poprawne.

Warto się bardzo dobrze przyjrzeć ostatniemu krokowi, gdyż w nim najłatwiej popełnić błąd.

Nie zawsze dowody indukcyjne służą tylko do obliczania sum, czesto wykorzystywane w geometrii. Zadanie: jeżeli W jest n-kątem wypukłym na płaszczyźnie, to suma jego kątów wewnętrznych jest równa $180^o \cdot (n - 2)$.

1.3.2 Rozszerzona metoda indukcji

- Tak jak w zwykłej indukcji

- Pokazujemy, że $P(n)$ zachodzi dla jakiejś małej liczby, zazwyczaj $n = 0$, ale może być inna, lub nawet dla jakiegoś małego zakresu danych.

- Wykonujemy krok indukcyjny: zakładając, że $P(k) = 1$ jest spełnione dla klażdego $k \leq n$ pokazujemy, że $P(n + 1)$ jest poprawne.

Przykład: pokazać, że każda triangulacja n-kąta wypukłego „używa" (n-2) trójkątów. To „twierdzenie" akurat można udowodnić na multum sposobów, nie tylko indukcją.

Twierdzenie 1.3.1 *Dla każdego $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ suma liczb $\sum_{k=0}^{n} k^m$ wyraża się wzorem, który jest wielomianem stopnia $m+1$ względem zmiennej n, t.j.*

$$\sum_{k=0}^{n} k^m = a_{m+1}n^{m+1} + a_m n^m + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0, \tag{1.15}$$

gdzie a_i to współczynniki wielomianu.

Przykład: $\sum_{k=0}^{n} k$ (jest wcześniej), $\sum_{k=0}^{n} k^2$ (do zrobienia).

1.3.3 Zadania:

- Pokazać indukcyjnie, że $\sum_{k=0}^{n} = 2^{n+1} - 1$.
- Znaleźć wzór na sumę sześcianów kolejnych liczb nieparzystych $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n+1)^3$ a nastepnie udowodnić ten wzór indukcyjnie.
- Znaleźć wzór na naprzemienną sumę sześcianów kolejnych liczb naturalnych o długości $2n$: $-1^3 + 2^3 - 3^3 + 4^3 - 5^3 + \ldots - (2n+1)^3 + (2n)^3$ a nastepnie udowodnić go indukcyjnie.
- (*) Udowodnić wzór Picka. Wzór picka mówi, że jeśli mamy wielokąt W (dowolny, może nie być wypukły), którego wierzchołki leżą w punktach kratowych o współrzednych całkowitych na płaszczyźnie, to $pole(W) = i + \frac{p}{2} - 1$, gdzie i - ilość punktów kratowych wewnątrz W (ale nie na brzegu) a p to liczba punktów na brzegu W.
- (*) Wybierzmy dowolną liczbę $a_0 \in \mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i zdefiniujmy ciąg:

  $$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{kiedy } a_n \text{ jest parzysta} \\ 3 \cdot a_n + 1, & \text{kiedy } a_n \text{ jest nieparzysta} \end{cases} \tag{1.16}$$

  Np. dla $a_0 = 3$ otrzymujemy ciąg $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$.

  Pytanie: czy dla każdej liczby $a_0 \in \mathbb{N}_+$ podany ciąg zawsze kończy zapętlony na liczbach $4, 2, 1$?

1.4 Kwadratowa kula

Jak obliczać odległość na płaszczyźnie?

Odpowiedź (niech $u := (u_x, u_y)$, itp.):

$$d(u,v) = \sqrt{(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2} \tag{1.17}$$

A jak w przestrzeni (3D)?

$$d(u,v) = \sqrt{(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2 + (u_z - v_z)^2} \tag{1.18}$$

A w przestrzeni n-wymiarowej:

$$d(u,v) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2} \tag{1.19}$$

Uwaga 1.4.1 *Symbol $\sum_{i=n}^{m}$ oznacza sumę indeksowaną zmienną i, która zmienia się od n do m, np.*

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \tag{1.20}$$

Inny przykład (bardziej abstrakcyjny, gdzie sumujemy jakieś elementy jakiegoś, bliżej nieznanego ciągu liczb a_i):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{1.21}$$

Kolejny przykład, gdy wyrażenie „pod sumą” nie zależy od i:

$$\sum_{i=1}^{n} j = j + j + \ldots + j = n \cdot j \tag{1.22}$$

Możemy również dokonywać skoków większych niż o 1:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{3\cdot i} = a_0 + a_3 + a_6 + \ldots + a_{3\cdot n} \tag{1.23}$$

Zwyczajowo zakłada się, że w $\sum_{i=n}^{m}$ mamy $m \geq n$, a jesli $m < n$ to suma równa się 0, bo sumujemy 0 elementów (będzie to bardzo znajome dla osób, które kiedyś programowały, odpowiada to konstrukcji pętli for z języka `C/C++`).

Wróćmy na chwilę do mierzenia odległości. Widzieliśmy już koło na płaszczyźnie:

$$B^2(c, r) := \{v \in \mathbb{R}^2 : (v_x - c_x)^2 + (v_y - c_y)^2 \leq r^2\} \tag{1.24}$$

Jak zatem zdefiniowac kulę (obiekt 3D)? Analogicznie:

$$B^3(c, r) := \{v \in \mathbb{R}^2 : (v_x - c_x)^2 + (v_y - c_y)^2 + (v_z - c_z)^2 \leq r^2\} \tag{1.25}$$

Możemy też zdefiniować kulę w n-wymiarowej przestrzeni.

Zadanie: zapisz w nowopoznanej notacji zbiór będący kulą w n-wymiarowej przestrzeni.

Odpowiedź:

$$B^n(c, r) := \{v \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} (v_i - c_i)^2 \leq r^2\} \tag{1.26}$$

lub nawet zwięźlej:

$$B^n(c, r) := \{v \in \mathbb{R}^n : d(c, v) \leq r\}, \tag{1.27}$$

czytając „po ludzku”: kula w punkcie c i promieniu r to zbiór takich punktów, że są odległe (odległość mierzona przez funkcję d) od c co najwyżej o r. Od teraz, na wszystkie obiekty postaci (1.27) możemy mówić „kula”, nawet dla $n = 1, 2$.

Zadanie: czym jest kula w przestrzeni 1-wymiarowej?

O co chodzi z „ kwadratową kulą” z tytułu podrozdziału - zobaczymy na jednych z przyszłych zajęć.